

一種新的多維變量管制圖—方塊管制圖

葉百堯 陳雲岫 林共進

美國 Bowling Green 州立大學應用統計及作業研究學系

元智大學工業工程與管理學系

美國賓州州立大學管理科學及資訊系統學系

摘 要

本文提出在管制圖上可以同時監測製程平均值及製程變異數變化的一種新的變量管制圖—方塊管制圖 (*Box-chart*)。當製程偏移的警訊被偵測後，此方塊管制圖可以清楚且明確的指出製程脫離管制之類別是為平均值偏移，變異數改變或是兩者均產生變化。方塊管制圖是利用機率積分轉換 (*probability integral transformation*) 原理得到在 $(0, 1)$ 間獨立具相同均勻分配的兩個隨機變數後建構得出。於本文中，我們將詳述方塊管制圖的建構原理及過程，並分別以實際案例及模擬數據驗證之。

關鍵詞：方塊管制圖，均勻分配，機率積分轉換，獨立性。

美國數學會分類索引：主要 62N10。

1. 引言及文獻探討

在統計製程管制 (statistical process control ; SPC) 核心的技術中，管制圖可說是最重要也最被廣泛應用的一項技術。管制圖自 Shewhart (1925) 提出後，便在工業實際操作中應蔚為一標準程序及步驟。在多種管制圖中， \bar{X} 以及 R (或 S) 管制圖仍是最通用，使用率最高的管制圖。近來，建構可以同時監控制程平均值及變異數變化的二維管制圖在統計及品質管制領域中日益重要。如 Spiring 及 Cheng (1998) 提出的 MSE 管制圖，它們利用觀測值與目標值誤差平方的均值在單一圖形上描製兩個不交叉的統計測量值；Cheng 及 Li (1997) 計算極值與目標值差距的絕對值合併描繪在一管制圖，稱之為 T 管制圖；另外，Repco (1986) 及 Van Nuland (1992) 將統計量 $W = (\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma)^2 + (\sqrt{2n}(S - \sigma)/\sigma)^2$ 描繪在一兩維的圖形上，稱之為製程能力圖 (process capability plot)，這裡 \bar{X} 、 S 、 μ 及 σ 分別為樣本平均值，樣本標準差，製程平均值及製程標準差。Chao 及 Cheng (1996) 則是提出半圓管制圖 (semi-circle chart)，亦即將 $T = (\bar{X} - \mu)^2 + ((n - 1)/n)S^2$ 描繪在一半圓圖形內。前述學者提出的管制圖均有至少一項下列之缺點：

- (a) 當一管制外的訊號被偵測時，無法明確的指出異常肇因於製程平均值或製程變異數或兩者皆有出現。
- (b) 對一二維的圖形而言，兩個座標軸的單位刻度均不一致，此現象易產生混淆及解說錯誤之狀況。例如，平均值偏移一單位 (大多數為 x-軸) 與標準差偏移一單位 (大多數為 y-軸) 的解說即代表不同涵意。

在本文中，我們提出一種新的變量管制圖不但能克服上述的缺點，且達到在一單一管制圖上可同時偵測製程平均值與標準差變化之能力，此種新建構的管制圖我們命名為方塊管制圖 (box-chart)。在接下來的章節中，第二節描述方塊管制圖建構原理及方法，實際案例應用說明在第三節，第四節則是利用模擬方法評估方塊管制圖，一些相關議題以及未來研究方向的討論則呈現在第五節。

2. 方塊管制圖之原理

令 X 代表製程中某一品質特徵的隨機變數，具有平均值 μ_0 及標準差 σ_0 的常態分佈。給定樣本大小為 n 的一組隨機樣本， X_1, X_2, \dots, X_n ，定義

$$M = P\left(Z \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) \quad (1)$$

及

$$V = P\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right) \quad (2)$$

此處 Z 及 X_{n-1}^2 分別代表具標準常態分配及自由度為 $n-1$ 卡方分配之隨機變數。當製程在管制內，則 M 及 V 分別具有在 $(0, 1)$ 之間的均勻分配，亦即 $U(0, 1)$ ，再者，因為在常態分佈假設下，因 \bar{X} 及 S^2 彼此獨立所以 M 及 V 相互獨立。根據此結果，我們可以建構一新的管制圖，命名為方塊管制圖 (box-chart)。表一採用 Van Nuland (1992) 中之數據，此數據在 1996 年亦曾在 Chao 及 Cheng (1996) 文獻中採用過。此筆數據共有 25 組每組含 4 個從 DSC (differential scanning calorimetry) 機器得之測量值。利用表 1 的數據資料，圖 1 顯示將 M 及 V 值，分別描繪在兩個合宜之上、下界限的管制圖 (相較於 \bar{X} 及 S 圖)。譬如，設定為 3 個標準差的管制界限下，可令 $M_{lower} = V_{lower} = 0.00135$ 及 $M_{upper} = V_{upper} = 0.99865$ 。此外，因 M 及 V 均具有相同的刻度量 (均介於 $(0, 1)$ 之間) 且兩者相互獨立，故可以將圖 1 中的 M - 及 V - 兩個圖形合併成一個二變量圖形，見圖 2。圖 2 呈現的是一典型的方塊管制圖形。圖中用不同的字母標示在不同的區域，顯示製程平均值偏移到管制外 (M) 或是製程變異數落在管制外 (V) 或是兩者均在管制外 (B)。利用預先設定之型 I 誤差機率值來決定製程平均值偏移或是變異數改變所在的區域大小。在實際應用上，將點 (M, V) 值描繪在方塊管制圖上，若 (M, V) 落在任何有字母標示之區域，表示製程落在管制界限外。方塊管制圖之基本精神完全是建立在機率積分轉換原理。相較於近期提出之類似管制圖，如 MSE- 管制圖，T- 管制圖，半圓管制圖等，方塊管制圖有下列優點：(i) 可以明確的指出管制不正常的問題是肇因於平均值偏移，變異數改變或兩者。(ii) 二變量的刻度單位相同且均在 $(0, 1)$ 間。此外，機率積分轉換原

理不會僅侷限在常態分配，亦可應用在非常態分配過程，只要平均值與變異數之檢定統計量的抽樣分配能求得。

表1 DSC 例題之數據資料

X_1	X_2	X_3	X_4	\bar{X}	S	M	V
42.2	42.3	42.0	42.1	42.15	0.129	0.9997	0.0718
41.9	42.1	41.8	41.6	41.85	0.208	0.9601	0.2428
41.7	41.8	41.8	41.9	41.80	0.082	0.9284	0.0197
41.5	42.0	41.7	42.0	41.80	0.245	0.9284	0.3480
41.7	42.2	42.2	41.5	41.90	0.356	0.9791	0.6669
42.2	41.5	42.1	41.8	41.90	0.316	0.9791	0.5601
41.8	42.1	41.8	41.9	41.90	0.141	0.7221	0.7005
42.4	41.8	41.9	42.1	42.05	0.265	0.9979	0.4069
42.2	41.9	42.5	42.8	42.35	0.387	0.9999	0.7404
41.8	42.6	41.4	42.3	42.03	0.532	0.9969	0.9397
42.4	42.0	41.8	42.1	42.08	0.250	0.9461	0.5409
41.0	41.1	41.4	41.5	41.25	0.238	0.0399	0.3276
42.0	41.4	40.7	40.4	41.13	0.718	0.0070	0.9954
40.9	41.1	41.3	40.7	41.00	0.258	0.0009	0.3876
41.1	40.9	41.0	41.3	41.08	0.171	0.0031	0.1501
41.0	41.6	41.3	40.9	41.20	0.316	0.0209	0.5601
41.7	41.7	41.0	41.0	41.35	0.404	0.1201	0.7753
41.3	41.0	40.9	41.7	41.23	0.359	0.0291	0.6756
41.4	41.0	40.9	41.6	41.23	0.330	0.0291	0.5998
40.9	40.5	40.7	41.5	40.90	0.432	0.0001	0.8258
40.9	41.5	41.8	41.7	41.48	0.403	0.3292	0.7732
41.8	40.9	41.5	40.6	41.20	0.548	0.0209	0.9504
41.2	41.9	42.1	41.7	41.73	0.386	0.8482	0.7380
41.5	41.7	41.5	41.0	41.43	0.299	0.2308	0.5089
41.5	41.0	41.4	41.2	41.28	0.222	0.0539	0.2804

2.1 當製程平均值及標準差為已知時

假設現有 K 組訓練樣本，每組有 n 個樣本，令 X_{ij} 為第 j 組第 i 個樣本， $i = 1, 2, \dots, n$ 及 $j = 1, 2, \dots, K$ ， $\bar{X}_j = \sum_{i=1}^n X_{ij}/n$ 及 $S_j^2 = \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 / (n-1)$ ， $j = 1, 2, \dots, K$ 分別為第 j 組樣本平均值及樣本變異數。此外，令 $N = K \times n$ ， $\bar{X} = \sum_{j=1}^K \bar{X}_j / K$ 及 $\bar{S} = (\sum_{j=1}^K S_j^2 / K)^{\frac{1}{2}}$ 。在本文中，我們假設過程中所得之樣本均具有常態分配（參見註解 2.2）。

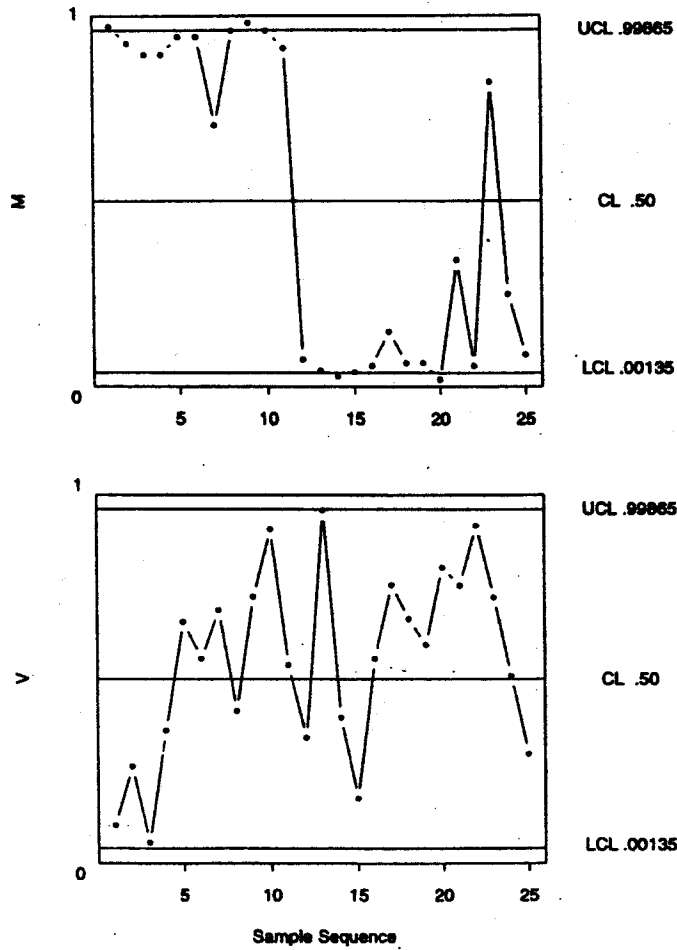


圖1 M 及 V 管制圖之範例

建構並使用方塊管制圖監控製程之前，須先確定製程是否在管制內。進行之步驟如下：首先，對每一個 $j = 1, 2, \dots, K$ ，計算下列的統計量

$$M_j = P\left(Z \leq \frac{\bar{X}_j - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) \quad (3)$$

及

$$V_j = P\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{(n-1)S_j^2}{\sigma_0^2}\right) \quad (4)$$

此處 μ_0 及 σ_0 分別代表已知之平均值 (μ) 及標準差 (σ)， μ 及 σ 會產生雙尾型 I 誤差的可能值均設為 0.0027，類似於圖 2 的方塊管制圖則可建構形成。

接著，將 K 組 $(M_1, V_1), (M_2, V_2), \dots, (M_K, V_K)$ 描繪在方塊管制圖上，若發現點落在管制外，則 (i) 確定為何樣本，並從落點的區域辨明發生管制失常的原因，(ii) 查明失常發生之根源，接著 (iii) 做必要的修正。重覆 (i)，(ii) 及 (iii) 步驟直至所有發生失常根源被找到且修正。在確定製程處於管制內後，即進入所謂第二階段 (phase II) 對製程做一系列的監測 (monitoring)。對於每一組新的 n 個樣本， $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}$ 計算 $M_1 = P(Z \leq \sqrt{n}(\bar{X}_1 - \mu_0)/\sigma_0)$ 及 $V_1 = P(X_{n-1}^2 \leq (n-1)S_1^2/\sigma_0^2)$ 並將其描繪在先前建構之方塊管制圖上，若 (M_i, V_i) 是落在有標示的區域，則表示製程在管制外，必要的行動必須立刻執行以解決問題。實際上當 μ 與 σ 已知的情形下，方塊管制圖與合併 \bar{X} 及 S 管制圖的結果是一致的。

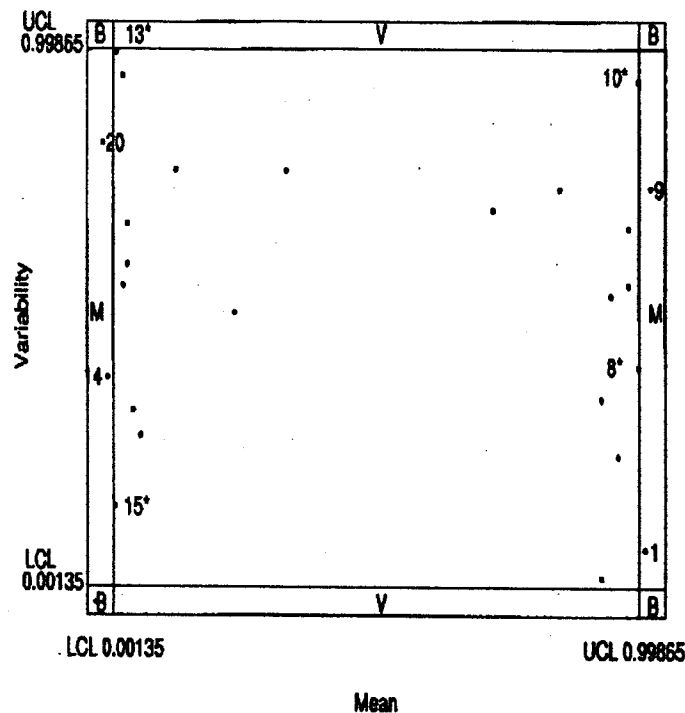


圖2 DSC 例題之方塊管制圖

2.2 當製程平均值及標準差為未知時

我們用樣本估計量取代式 (3) 及式 (4) 中的 μ_0 及 σ_0 ，並令 $\bar{S}_{(j)} = \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k S_l^2 / (k-1) \right)^{\frac{1}{2}}$ ， $j = 1, 2, \dots, K$ ，計算

$$M'_j = P\left(t_{N-K} \leq \frac{\bar{X}_j - \bar{X}}{\bar{S}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{N}}}\right) \quad (5)$$

及

$$V'_j = P\left(F_{n-1, N-K-n+1} \leq \frac{S_j^2}{S^2}\right) \quad (6)$$

其中 t_{N-K} 及 $F_{n-1, N-K-n+1}$ 分別為具自由度 $N-K$ 之 t 分配及自由度 $n-1$ 及 $N-K-n+1$ 之 F 分配的兩隨機變數。當 μ 及 σ 為未知時， M'_j 及 V'_j 仍為獨立且具有相同在 $(0, 1)$ 間的均勻分配（證明詳見附錄）。所以我們可以将 $(M'_1, V'_1), (M'_2, V'_2), \dots, (M'_K, V'_K)$ 描繪在方塊管制圖上，若有觀測點落在管制外，先尋找失效根源並調整修正至正常狀態。再利用其餘的樣本重新計算 \bar{X} 、 \bar{S} 、 N 、 K ，然後再計算相對應的 M'_j 及 V'_j 並將其繪製在方塊管制圖上，重覆此修正步驟直至所有點均在管制內。

令修正後的剩餘樣本所算得的 \bar{X} 、 \bar{S} 、 N 及 K 值分別為 \bar{X}_I 及 \bar{S}_I 、 N_I 及 K_I 。當進入對製程進行監控時，對每一個新的樣本， $X_{I1}, X_{I2}, \dots, X_{In}$ ， $l = 1, 2, 3, \dots$ ，計算

$$M'_l = P\left(t_{N_I - K_I} \leq \frac{\bar{X}_l - \bar{X}_I}{\bar{S}_I\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{N_I}}}\right) \quad (7)$$

及

$$V'_l = P\left(F_{n-1, N_I - K_I - n + 1} \leq \frac{S_l^2}{\bar{S}_I^2}\right) \quad (8)$$

依據附錄中同樣的證明程序，我們可證明 M'_l 及 V'_l 為獨立且均具 $U(0, 1)$ 分配的隨機變數，所以我們可以把 M'_l 及 V'_l 描繪於方塊管制圖上，當觀測點落在任何標示區域則表示製程在管制外狀態。

註解 2.1：此方法亦可應用在不同的樣本大小，唯一的差別只是 t 及 F 分配會有不同的自由度。

註解 2.2：依照今日計算機的演算速度，任何一部桌上型電腦皆可輕易的計算 M 及 V 值。操作者可直接將收集到的數據計算出 (M, V) 值並繪製在方

塊管制圖上，由數據之位置可毫不費力的解說結果。事實上，描點的工作亦可由電腦自動化處理，猶如許多統計軟體均可以自動地繪製出 \bar{X} 及 R(或 S) 管制圖。

3. 實例解說

第一個例子我們採用表一的 DSC 數據。將此筆數據應用在方塊管制圖， \bar{X} 及 S 管制圖，及半圓管制圖的結果分別呈現在圖 2，圖 3 及圖 4。圖 2 的方塊管制圖顯示樣本第 1，9，14 和 20 組是落在管制外，樣本第 8，10，13 和 15 組雖在管制內但近於管制邊界，需要進一步了解這幾組樣本。從方塊管制圖中，可以清楚的看到在這筆數據中有兩堆不同平均值的樣本，然而此現象卻無法從半圓管制圖中觀察得之。

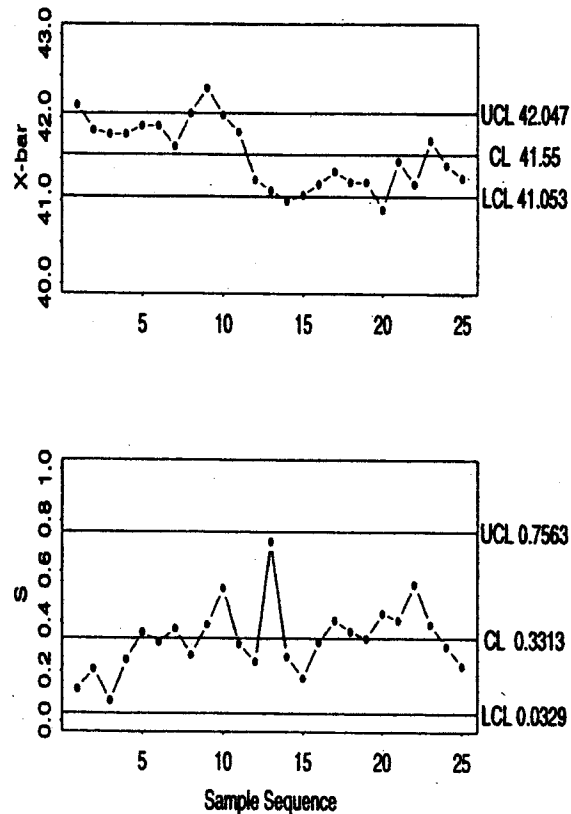


圖3 DSC 例題之 \bar{X} 及 S 管制圖

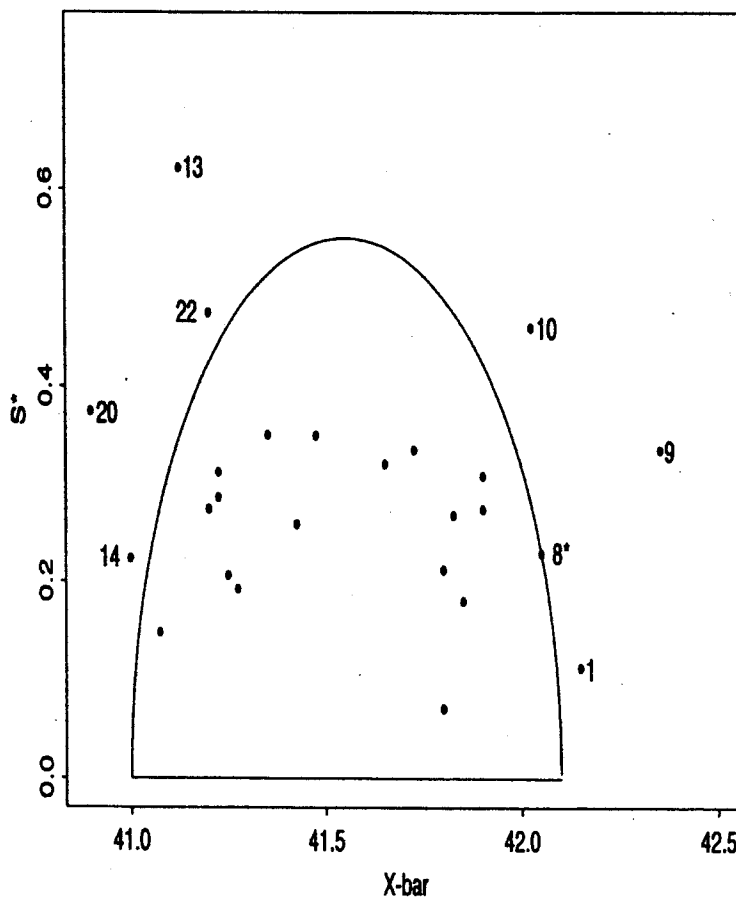


圖4 DSC 例題之半圓管制圖

相較於方塊管制圖，落在半圓管制圖的管制外區域點較多，除了點 1，9，14，20 外尚有 8，10，及 13，另外，樣本 22 亦落在管制外區域，此乃因為 \bar{X} 及 S 的加成效果導至。Chao 及 Cheng (1996) 一文中曾討論如何檢測製程失常的原因，但其效果並不如方塊管制圖來得明顯。舉例來說，在圖 4 中的樣本 1 及 14 是因製程平均值偏移所致，然而，造成樣本 9 和 20 異常之原因不正常則不易判讀出是屬於平均值偏移，變異數改變或兩者皆有之因素。反觀方塊管制圖則可很清楚的指出製程不正常的主因。

通用的 \bar{X} 及 S 管制圖提供了下列三點資訊：(1) 在方塊管制圖中落在管制外之點亦出現在 \bar{X} 管制圖；(2) 在 S 管制圖中第 13 號樣本產生突然往上跳的一高值；及 (3) \bar{X} 管制圖顯示自第 12 個樣本值開始，平均值有往下偏移的趨勢。

第二個範例則取自於 Montgomery (1997)，相關於某一工廠製造瓣環內徑的測量值。我們取 25 組在管制內的資料做為訓練樣本，此 25 組之樣本統計分別為 $\bar{X} = 74.001$ 及 $\bar{S} = 0.009$ 。以此筆資料之統計量視為過程在管制內 ($\bar{X} = 74.001$ 及 $\bar{S} = 0.009$) 之常態分配，再依據產生另外三個樣本，每一個樣本分別反應過程變化的一種狀態。第 26，27，28 個樣本分別模擬自 $N(74.02125, 0.009)$ ， $N(74.001, 0.02025)$ 及 $N(74.02125, 0.02025)$ 三種分配。此三筆模擬資料加上原先之 25 筆資料共 28 筆，分別描繪在方塊管制圖 (圖 5)，及 S 圖 (圖 6) 及半圓管制圖 (圖 7)。圖 5 的方塊管制圖不但清楚指出三個管制外樣本點為 26，27 及 28，且很清楚的標示脫離管制的原因為為平均值偏移，變異數改變或是兩者皆有變動所致。在此範例中半圓管制圖亦透露與方塊管制圖相同的訊息。

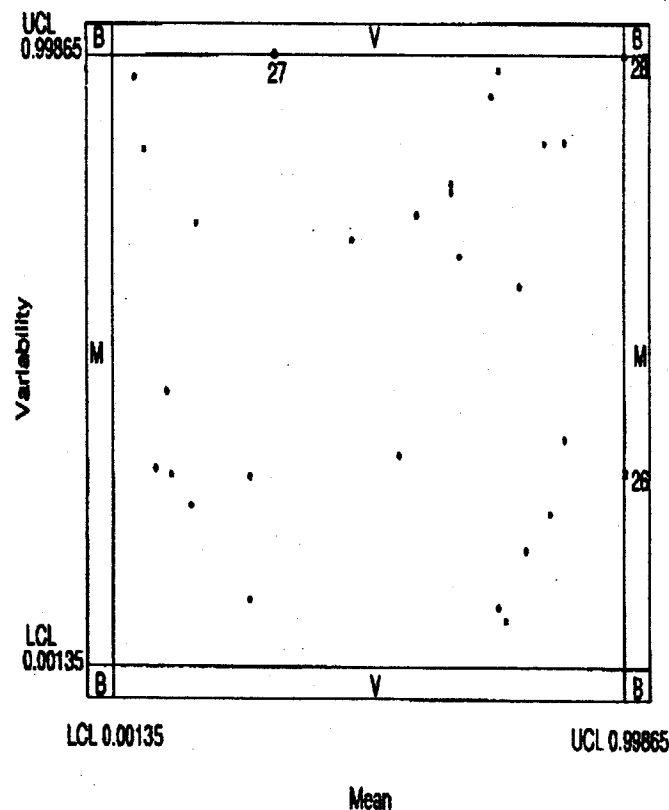


圖 5 瓣環內徑例題之方塊管制圖

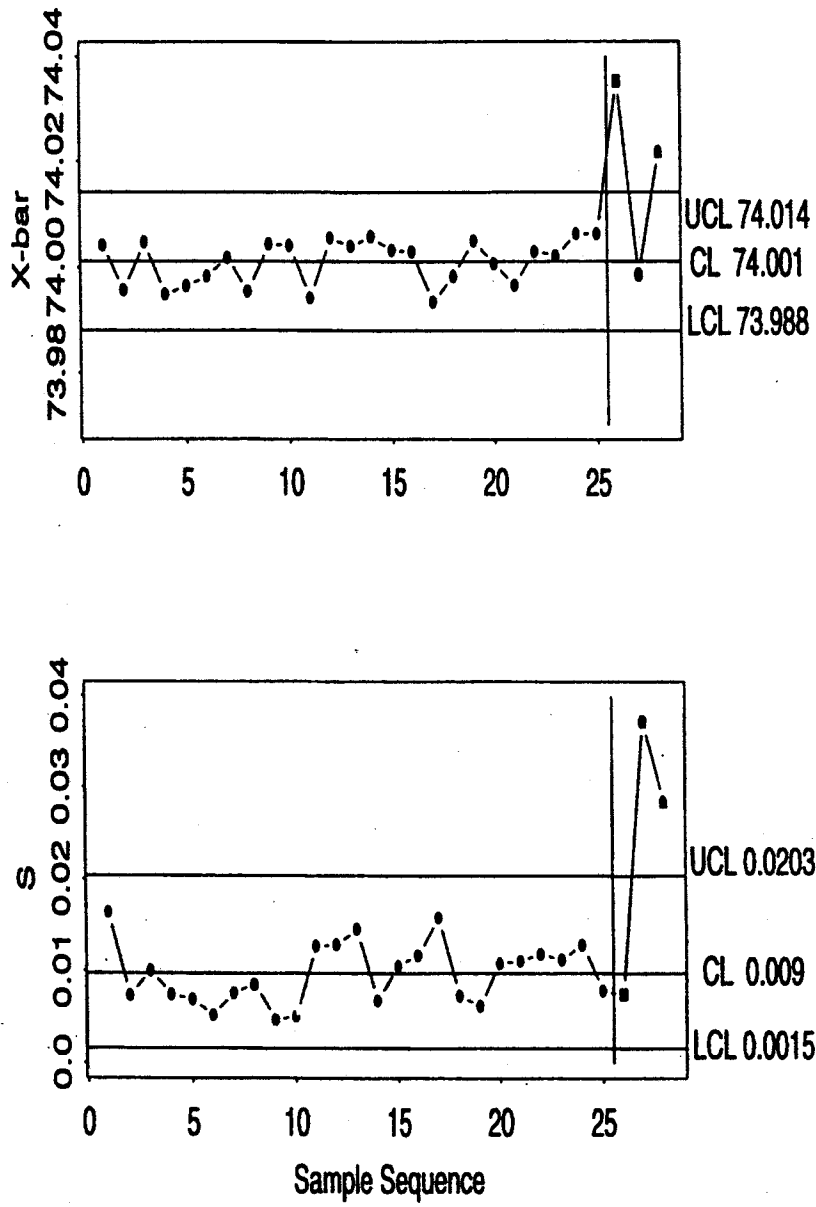


圖6 瓣環內徑例題之 \bar{X} 及 S 管制圖

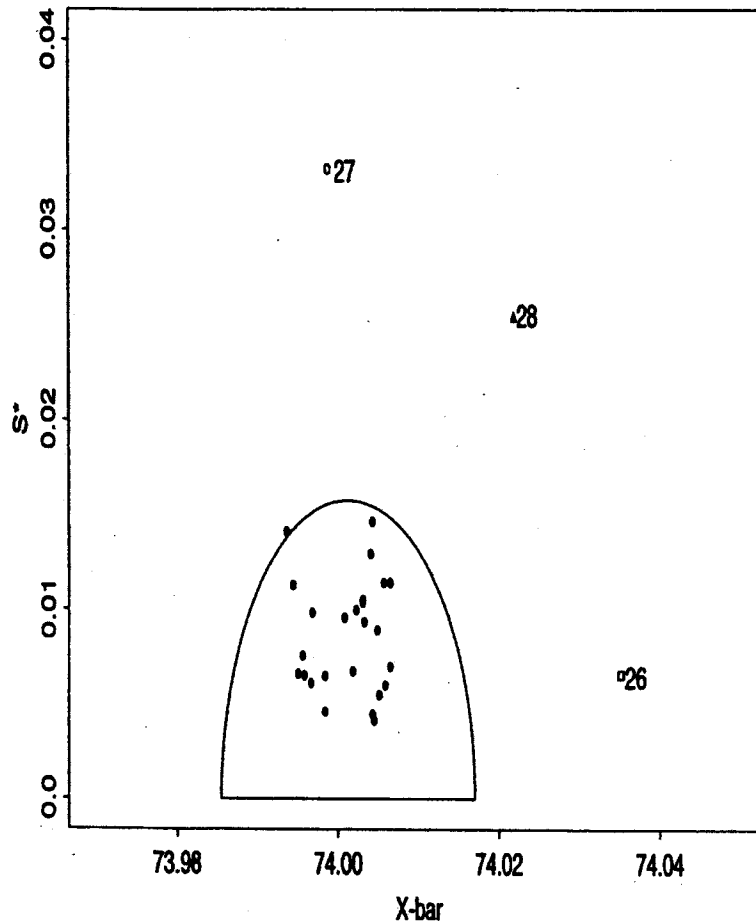


圖7 瓣環內徑例題之半圓管制圖

4. 模擬分析探討

在此節，我們展示平均連串長度 (average run length ; ARL) 的蒙地卡羅模擬結果。假設母體具常態分配，平均值為 μ ，標準差為 σ ($\sigma > 0$)，每組之樣本大小 n 分別採用 $n=4, 6, 8$ 及 10 。首先，對任一 n 值，模擬產生 $N(0, 1)$ 的 30 組訓練樣本 (此處假設管制內製程具 $N(0, 1)$)，此些訓練樣本值用做 \bar{X} 及 \bar{S} 之統計值。其後，再從 $N(\mu, 1)$ 不同的 μ 值，每一 μ 值模擬出 40000 筆新資料，用以研究 ARL 之變化。ARL 之計算方式為 $1/[P(\text{落在管制外之訊號})]$ ，而 $[P(\text{落在管制外之訊號})]$ 是由 (落在管制外訊號之樣本個數)/40000 估計得之。同樣地，以方塊管制圖得之結果與 \bar{X} 及 S 管制圖，

半圓管制圖 (Chao 及 Cheng, 1996) 列表比較之，模擬結果列於表 2。在表 2 中，位於每區塊第一列為製程在管制下 ($\mu = 0, \sigma = 1$) 的 ARL 值。

表2 平均值偏移 ($\mu > 0, \sigma = 1$) 之 ARL 比較表

μ	方塊 管制圖	\bar{X} 及S	半圓 管制圖
(n=4)			
0.0	177.78	177.78	181.82
0.5	60.15	42.69	20.87
1.0	7.99	6.44	4.81
1.5	2.31	2.03	1.86
2.0	1.25	1.19	1.18
(n=6)			
0.0	174.67	174.64	179.37
0.5	37.42	29.13	24.32
1.0	4.35	3.81	4.75
1.5	1.45	1.38	1.63
2.0	1.05	1.04	1.08
(n=8)			
0.0	186.05	186.05	188.68
0.5	20.84	17.64	19.58
1.0	2.58	2.38	3.50
1.5	1.15	1.13	1.34
2.0	1.01	1.00	1.02
(n=10)			
0.0	224.72	224.72	210.53
0.5	18.81	16.06	21.65
1.0	2.08	1.96	3.25
1.5	1.07	1.06	1.24
2.0	1.00	1.00	1.01

一般而言，方塊管制圖與 \bar{X} 及 S 管制圖在成效上是不相上下。當均值偏移量較大或是大樣本下的小偏移量，方塊管制圖則是與半圓管制圖相當。表 3 列出在變異數增加 ($\sigma > 1$)，不偏移 ($\mu = 0$) 情況下的 ARL 的模擬結果。從數據上顯示，方塊管制圖與 \bar{X} 及 S 管制圖是相當接近。另一方面，在 σ

值變化較大時，方塊管制圖與半圓管制圖是同樣好；但當 σ 值變化小時，半圓管制圖則表現較好。

表3 變異數變化 ($\mu = 0, \sigma > 1$) 時之 ARL 比較表

μ	方塊 管制圖	\bar{X} 及 S	半圓 管制圖
(n=4)			
1.25	38.02	27.12	7.91
1.50	11.75	9.33	3.58
1.75	5.40	4.51	2.26
2.00	3.31	2.91	1.75
(n=6)			
1.25	10.12	8.32	3.55
1.50	3.77	3.32	1.92
1.75	2.15	1.99	1.42
2.00	1.59	1.51	1.22
(n=8)			
1.25	9.94	8.35	3.69
1.50	3.30	2.98	1.84
1.75	1.88	1.77	1.33
2.00	1.40	1.35	1.15
(n=10)			
1.25	9.16	7.81	3.59
1.50	2.86	2.62	1.69
1.75	1.64	1.56	1.25
2.00	1.27	1.24	1.10

μ 及 σ 同時改變時之模擬結果呈現在表 4。方塊管制圖在不同狀況下表現的與 \bar{X} 及 S 管制圖及半圓管制圖相當近似，然而，方塊管制圖融合了監測製程平均值及製程變異數於同一個管制圖內，比 \bar{X} 及 S 管制圖為兩個分開的管制圖為佳。使用半圓管制圖的一缺點則是較不易從圖中指出落在管制外的訊號是屬於均值或變異數改變，方塊管制圖則能清楚且簡易的指出製程發生異常現象的原因。

表4 平均值及變異數均變化 ($\mu > 0, \sigma > 1$) 時之 ARL 比較表

μ/σ	方塊 管制圖	\bar{X} 及S	半圓 管制圖
(n=4)			
0.5/1.5	4.54	3.88	2.08
0.5/2.0	2.03	1.87	1.36
1.0/1.5	2.82	2.52	1.64
1.0/2.0	1.74	1.63	1.27
1.5/1.5	1.76	1.65	1.29
1.5/2.0	1.46	1.39	1.17
(n=6)			
0.5/1.5	4.15	3.68	2.14
0.5/2.0	1.82	1.71	1.31
1.0/1.5	2.13	1.99	1.51
1.0/2.0	1.50	1.43	1.19
1.5/1.5	1.34	1.30	1.18
1.5/2.0	1.25	1.22	1.20
(n=8)			
0.5/1.5	3.48	3.13	1.97
0.5/2.0	1.55	1.48	1.21
1.0/1.5	1.83	1.74	1.41
1.0/2.0	1.32	1.28	1.12
1.5/1.5	1.20	1.17	1.12
1.5/2.0	1.13	1.12	1.05
(n=10)			
0.5/1.5	3.48	3.16	2.02
0.5/2.0	1.45	1.40	1.17
1.0/1.5	1.69	1.61	1.38
1.0/2.0	1.25	1.22	1.09
1.5/1.5	1.13	1.12	1.09
1.5/2.0	1.09	1.08	1.04

5. 討論與結論

在本研究中，我們提出以方塊管制圖來合併 \bar{X} 及 S 管制圖的另一類方式，方塊管制圖基本上是将製程品質統計值利用機率積分轉換方式產生。此外，方塊管制圖亦可應用在多變製程上 (Yeh 及 Lin, 1999)。方塊管制圖優於其他管制圖 (例如，半圓管制圖，圓形管制圖) 的主要一點是它能很清楚的指

出製程失效原因為平均值偏移或變異數改變或兩者皆有。另一方面，模擬結果及例題顯示出方塊管制圖表現的與常用的 \bar{X} 及 S 管制圖一樣好。

顯然地，方塊管制圖與其他二變量管制圖有一共同的缺點，亦即是無法知道樣本順序，即使意欲在樣本點旁邊加上樣本順序值亦會增加觀察過程變化的困難性。若想了解時間序列的型態，Balkin 及 Lin (1997) 建議最好採用在時間序列領域中發展的技術，如 $Sacf$ (Sample autocorrelation function) 及 $Spacf$ (Sample partial autocorrelation function) 圖。事實上，因為構方塊管制圖中所描繪的 M 及 V 點均為 $(0, 1)$ 間的均勻分配，我們可以很容易地把 M 及 V 相對於樣本順序描繪在同一張圖上。這正是方塊管制圖的建構方法，另一種相對於其他二變量管制圖所沒有的優點。圖 8 所顯示的是把描繪於圖 2 中的 (M, V) 點，分別對樣本順序描繪在同一張管制圖上，“ m ”代表的是對平均值的監測，而“ v ”代表的是對變異數的監測。由圖 8 我們可看到樣本第 1, 9 組的“ m ”落在管制上限外，而樣本第 14, 20 組的“ m ”落在管制下限外。另外樣本第 8, 10 組的“ m ”則很接近管制上限，而第 13 組的“ m ”則很接近管制下限而其“ v ”卻又很接近管制上限。

值得提的是，由於機率積分轉換不但可用來建構本文所提出的方塊管制圖，還可以用來建構其他類型的管制圖，例如單變量和多變量的 CUSUM 和 EWMA 管制圖。這其中對於多變量 EWMA 管制圖的推廣尤其更是值得進一步的研究。

致謝詞:此文承蒙行政院國科會 (計劃編號 NSC 87-2119-M-001-007) 支持，作者在此謹致誠摯的謝意。

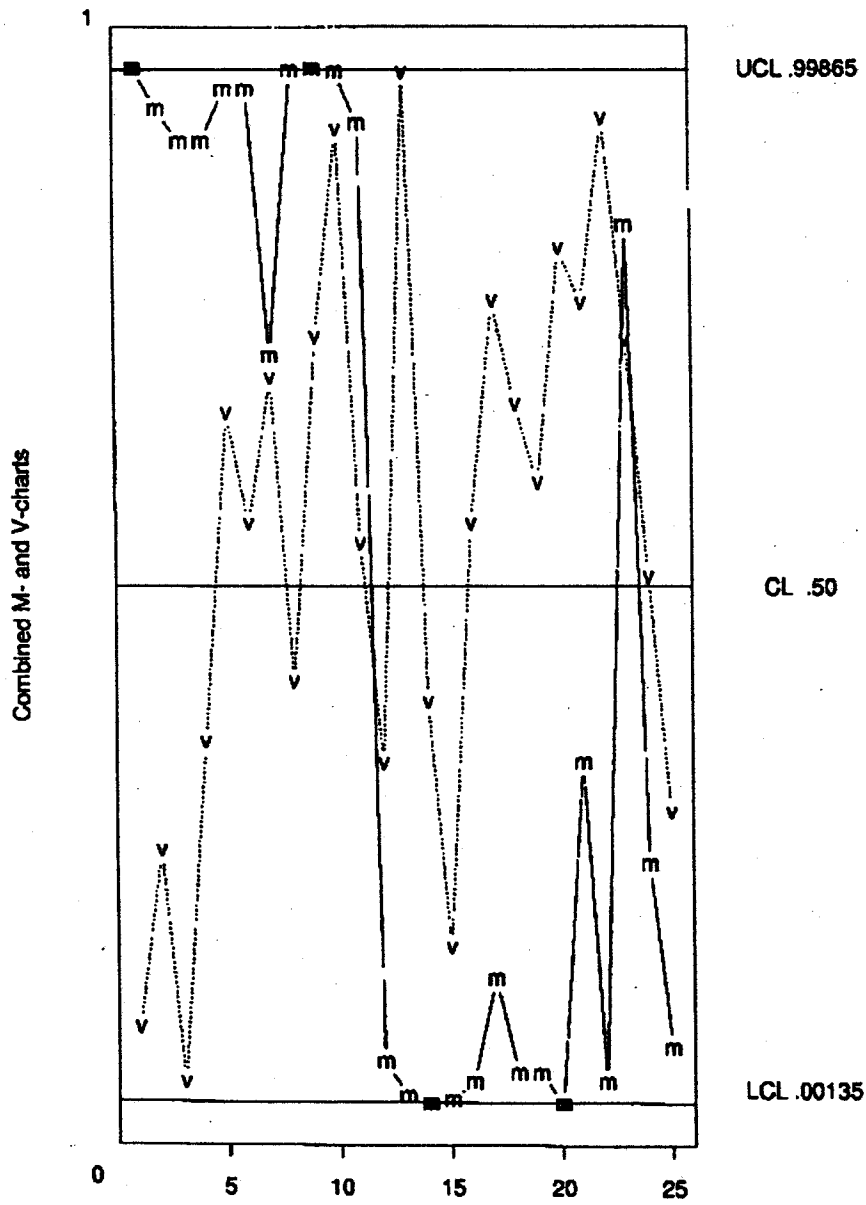


圖8 DSC 例題中 (m, v) 值依樣本順序之管制圖

附錄

在此節中，我們將證明公式 (5) 與 (6) 為二獨立之隨機變數。 $(n-1)S_j^2$ 及 $(k-1)(n-1)S_{(j)}^2$ 為二獨立且具卡方分配，衆所週知，若 X_1^2 及 X_2^2 為二獨立且具卡方分配之隨機變數時，則 $X_1^2 + X_2^2$ 與 X_1^2/X_2^2 為獨立。用此事實，則得到 \bar{S}^2 (或 \bar{S}) 與 $S_j^2/\bar{S}_{(j)}^2$ 彼此獨立。

令 $W_1 = (\bar{X}_j - \bar{X})/(\bar{S}\sqrt{1/n+1/N})$ 及 $W_2 = S_j^2/\bar{S}_{(j)}^2$ ，若能證明 W_1 及 W_2 獨立則足以證明式 (5) 與 (6) 獨立。考慮給定 \bar{X}_j 及 \bar{X} ， W_1 及 W_2 的條件聯合分配， $f(W_1, W_2|\bar{X}_j, \bar{X})$ 。給定 \bar{X}_j 及 \bar{X} 條件下， W_1 及 W_2 彼此獨立則 $f(W_1, W_2|\bar{X}_j, \bar{X})$ 可以寫成邊際條件分配的乘積， $f(W_1|\bar{X}_j, \bar{X}) \cdot f(W_2|\bar{X}_j, \bar{X})$ 。然而， W_1 的分配和 \bar{X}_j 或 \bar{X} 無關，也就是說， \bar{X}_j 、 \bar{X} 、 W_1 的條件分配等於 W_1 的邊際分配， W_2 亦同。同理在給定 \bar{X}_j 、 \bar{X} 下 (W_1, W_2) 的條件分配和 \bar{X}_j 及 \bar{X} 也無關，所以 (W_1, W_2) 的條件聯合分配等於 (W_1, W_2) 的聯合分配。此推演至

$$f(W_1, W_2|\bar{X}_j, \bar{X}) = f(W_1, W_2) \quad (9)$$

而

$$f(W_1, W_2|\bar{X}_j, \bar{X}) = f(W_1|\bar{X}_j, \bar{X}) \cdot f(W_2|\bar{X}_j, \bar{X}) = f(W_1) \cdot f(W_2) \quad (10)$$

由式 (9) 與式 (10) 則可得証 W_1 與 W_2 彼此獨立。

參考文獻

- Balkin, S. D. and Lin, D. K. J. (1997). Performance of sensitizing rules on Shewhart control chart with autocorrelated data. Working paper 97-2, MSIS Department, Pennsylvania State University.
- Chao, M. T. and Cheng, S. W. (1996). Semicircle control chart for variables data. *Quality Engineering* 8, 4441-4446.

- Cheng, S. W. and Li, G. Y. (1997). A single variable control chart. Technical report, University of Manitoba.
- Lowry, A. C. and Woodall, H. W. (1992). A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics* 34, 46-53.
- Montgomery, D. C. (1997). *Introduction to Statistical Quality Control*. 3rd edition, John Wiley & Sons.
- Repcó, J. (1986). Process capability plot. *The Proceeding of the 30th EQQC Conference*, 373-381.
- Shewhart, W. A. (1925). The applications of Statistics as an aid in maintaining quality of a manufactured product. *Journal of the American Statistical Association* 20, 546-548.
- Spiring, F. A. and Cheng, S. W. (1998). An alternative variable control chart: The univariate and multivariate case. *Statistical Sinica* 8, 273-287.
- Van Nuland, Y. (1992). ISO 9002 and the circle technique. *Quality Engineering* 5, 269-291.
- Yeh, A. B. and Lin, D. K. J. (1999). A new variables control charts for multivariate processes. Preprint, Bowling Green State University.

[民國90年10月2日收稿，民國91年5月6日接受。]

The Box-Chart : A New Variables Control Chart

Arthur B. Yeh, Yun-Shiow Chen and Dennis K.J. Lin

**Department of Applied Statistics and Operation Research, Bowling
Green State University, Bowling Green, Ohio, USA**

**Department of Industrial Engineering, Yuan-Ze University, Taiwan
Department of Management Science and Information Systems, The
Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania, USA**

ABSTRACT

In this paper, the box-chart, a new variable control chart that can simultaneously monitor process mean and process variability on a single chart is proposed. When an out-of-control signal is detected, the proposed chart provides a clear indication on whether the process mean or process variability or both are out-of-control. The box-chart uses the probability integral transformation to obtain two independent and identically distributed uniform distributions. We discuss in details how to construct the box-chart. The performance of the box-chart is assessed through simulation as well as real-life examples.

Key words and phrases: Box-chart, independence, probability integral transformation, uniform distribution.

AMS 1991 subject classifications: Primary 62N10.