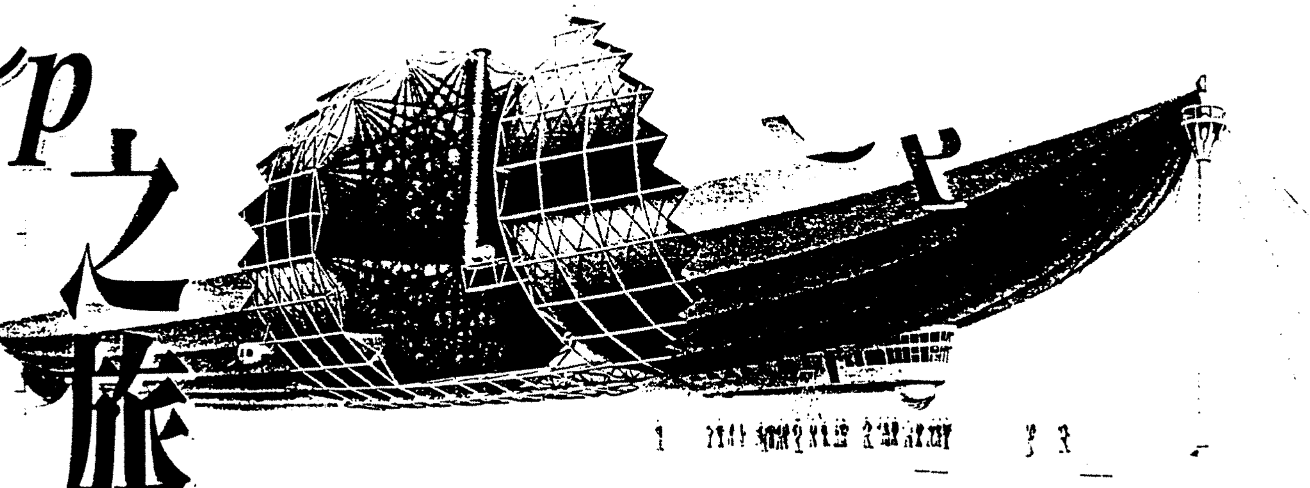
C_p之旅



* 趙民德・林共進

不久之前，我們開始研究「製程能力」，同時也順便研究一下「製程能力指數」，時下的資訊眞是方便，一兩個星期之後，案頭已滿是相關的論文。但是論文讀愈多，我們心裡的疑惑就愈多。用最簡單的話來說，製程能力到底在說些什麼事情？如果有兩個工廠，同時都在說他們的C_p值都是1.33，他們是否是在說同樣的事？

不論你喜歡還是不喜歡，C_p是既已存在又揮之不去的一個測度。記得參加國家品質獎評審的時候，某知名工廠就在各部門貼出目前的C_p的值及目標C_p值，

若產品的的規格區間值爲(L_l, L_u)，而品質特性值X呈常態分布$N(\mu,\sigma^2)$，則裘蘭(Juran)所認爲的製程能力是6σ，而相關的製程能力指數爲

$$C_p = \frac{L_u - L_l}{6\sigma}$$

至於裘蘭當年怎麼去想這個問題的，大概是找不太出來了。但是不管怎麼說，以上乃是所有教本和相關論文中的標準定義。若是我們向國內一些用到的C_p工廠來詢問，相信這也就是會拿到的答案。

爲何要用6σ呢？對於常態分布而言，$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$這個全長爲$6\sigma$的區間，包括了99.73%的可能，因此，它「差不多」把全部的可能性都包括了。當然，我們也可以用8σ，而$(\mu-4\sigma,\mu+4\sigma)$包括了99.99367%，更接近100%，但這因爲我們所面對的乃是談品質的人士，他們既要顧到傳統，又不能要求太高。當年裘蘭一下子就用到6σ，他的心情我們雖不知道，倒是可以理解的，至於數學上的理由：我們其實不太可能對$\pm 4\sigma$之外的分布的尾部有足夠的了解，因此努力去達成那種的目標沒有實質意義——往往是不會被提上來討論的。

如果C_p=1，則在理想的情形之下，產品的合格率大約就是99.73%；如果C_p =1.33，則合格率比99.73%要大，同時，產品在X上所表現的精度，它的上、下規格所允許的更嚴格了三

* 作者任職於中央研究院統計科學研究所

分之一。——意思是說，(L_1,L_2)這個規格給得太寬了，它們即使再縮小33%，合格率還可以達到99.73%的。這當然也可以反過來說：製程實在太棒了，因此比預期更多的品質特性值X會滿足規格(L_1,L_2)所給的上、下限。

C_p純然只是兩個長度的比，它直接表示規格大小和產能精度之間的比例，用1作為「還不錯」的標準。如果$C_p=1$，則製程是夠格的(process is capable)。

以上的說明，是一般所了解的C_p。它不只假設了$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，又同時假設了對稱：i.e.，

$$\mu=\frac{1}{2}(L_1+L_2)$$

如果這些假設有一部分或全部出了問題，C_p的解釋就會不一樣了，這就產生了一大堆研究工作者提出的C_p衍生物，例如：C_{pk}、C_{pm}…等等這些新的指標。

這些新指標通通是最早的C_p的推廣，並且通通缺乏C_p所獨有的，最最重要的特質：全世界都在用C_p，或者至少使用者認為他們懂得C_p說些什麼(雖然我們研讀了這麼多文獻，主要的結論之一反而是相信其實大家——或許包括裘蘭自己在內——並不一定知道C_p在測量什麼)。C_p提示著一個漂亮的但難以量化意義：製程能力。如果我們要設計一個有關自由民主的指標，表面上人人都懂得什麼是自由民主，請問如何量化成一個指標？

純從C_p公式的組成來看，它包括了(L_1,L_2)這個上、下限以及$X \sim N(\mu,\sigma^2)$這一條關於某品質特性的假設，事實上，如果我們將$X_1,\ldots,X_n$畫一個標準直方圖(histogram)，再註上L_1及L_2，我們理論上已足夠造出C_p及其他的C_{pk}、C_{pm}…等等來。如果$\mu \neq \frac{1}{2}(L_1+L_2)$，那麼設法改進製程，使X的目標值，恰落在$(L_1,L_2)$的中點：如果尚覺得不足，那麼下一步只好努力使$\sigma$變少。——誰都知道這是提高製程能力的基本方案。這同時也是$\bar{X}$管制圖、$\bar{R}$管制圖的基本方針，這和C_p的值是1，抑是1.33有什麼了不起的關聯？

嚴格地說，的確沒有。但一旦某個指標有了名氣之後，像樣一點的工廠就會自動採用，而且上下游工廠甚至競爭同業的同業之間，也都會拿出C_p值來比一比，反正C_p值愈大愈好。(1是「好」的起碼，1.3就不錯了，2就極難)。此外，有幾位品保部的經理可以提供較實在一點的意義？

比較常用的想法是將C_p值和ppm聯在一起。但合格率 = 99.73% 比C_p=1的意思更明白，何不逕自看

$$\text{合格率}=\int_{L_1}^{L_2} f(u)du$$

豈不更佳？

另一個想法是損失函數的想法。基本上我是不相信工業上的製程有什麼損失函數(或者更進一步的二次損失函數)的。泰勒展式是函數上某一點「附近」的局部(local)性質。而這在一個較大的區間(L_1,L_2)來看(想一想我們差不多要$L_2-L_1=6\sigma$！)就已經沒有意思了。

以上是「背景資料」。針對C_p，我們研究下來，雖然讀了一大堆論著，但仍然得承認「其實所知不多」。下面列舉的是我們覺得大概是正確的，關於C_p的資訊：

1. 它在$\mu=\frac{1}{2}(L_1+L_2)$，$X \sim N(\mu,\sigma^2)$時的公式，雖不知道是不是「正確的」，但至少是公認的。
2. 此外，我們不知道它「正確」的公式應該是什麼樣子。
3. 我們也不懂那些衍生的製程能力指標的意

思。

4. 在X為二維、三維的情形，雖有一些論文，但因為我們實在並不知道C_p是在量測那一個量，因此我們其實也弄不清楚它們是否是對的。

C_p之旅，走到這理是差不多該停下來了。但是我們說了這麼多，總得有自己的意見才是。如果不去理會多維的情形，假如X的累積分布是F(x)，i.e.

$$P(X \le x) = F(x)$$

我們是否可以「比較」正確地定義出C_p公式？

因為所有的C_p衍生公式，都是或多或少地來自揣摩裘蘭的原意而來，我們在此就特別故意不去揣摩他的原意——i.e.我們先不猜裘蘭當年心裡想些什麼，我們先認定只有以下公式：

$$L_p = \frac{L_2 - L_1}{6\sigma}$$

是對的，並且自它出發，看我們純自邏輯的觀點來看，能導出什麼新的東西。

X是我們有興趣的品質特性值，我們希望

$L_1 \leqq X \leqq L_2$

而X不一定是常態分布。前面我們說，只有在X是常態分布的時候，我們才知道正確的C_p公式為何。那麼，唯一的邏輯選擇是：我們得先把X的分布變成常態再說。

故事：某甲傷風求醫。醫曰：先洗一個冷水澡，在風口站三個小時，再來看我。

某甲曰：那傷風豈不變成肺炎？

醫曰：是！但傷風我不會醫，我會醫肺炎。

我們得自實際去觀測X入手。工業上，X總是用一個儀器去測出來的。你是否相信儀器所量出的值，就是真正的，你想要的值？

例如汽車上的油量表，為什麼加滿時，油¶qﬁłﬂ –o"C¡A¤ /F//¶¡¡Aƒn„‡·N'¿ M«D–'¶O"o /F¡Aƒ ¤ /F¥|/ /§/@¥H/Uﬁ ¡A"o¶q""ﬁłﬂ ƒn„‡ /S"C/F/U¤ ¡H

´†‡ ƒa»¡¡A"o¶q" ' •t¥ ""¿U"oƒs¶q¡A¤^ /£<O'Mﬂu¥¿""ƒs¶qƒ¤¥¿/æ""¡A"o¶q" ""¤Ł« /] ¥¸/£¤ ¤"» "°‰T¡C¤˘„Œ/W¡A§A¥u>n" „D« w<O H "o¶q""ﬁłﬂ ƒ »_· ¡A·N /F¡C

/W< ¡A‡]ƒs¶q<X，你看到的是g(X)，這是油表指針上說的存量。至於g是什麼樣子，並不相干。雖然我們需要g(X)是隨著X的增加而增加的。

同理，對品質特性值而言，我們看到的是X，抑是g(x)，並不那麼重要。我們有興趣的事情是是否有

$L_1 \leqq X \leqq L_2$

而這和

$g(L_1) \leqq g(X) \leqq g(L_2)$

的意義是完全一樣的。

我們只要找到一個g，使得g(x)的分布恰好是常態就好了。若能做到，我們就成功地將原來的傷風，換成肺炎。數學上，這樣的g是可以找出來的：

$$g(x) = \Phi^{-1}(F(x))$$

其中F(x)是X的累積分布函數，Φ則是標準常態分布的累積分布函數。因為F及Φ都是單調遞增，因此g(x)也是單調遞增。而(L_1, L_2)是針對X的上下限，針對g(x)而言，就成了$(\Phi^{-1}(F(L_1))$，$\Phi^{-1}(F(L_2)))$。因為g(X)的分布是標準常態分布$N(0,1)$，因此針對g(x)而言，相對應用的C_p，應該是

$$C_p = \frac{\Phi^{-1}(F(L_2)) - \Phi^{-1}(F(L_1))}{6}$$

製程能力，不論怎麼去定義，應該和我們如何去測量X——用什麼尺度，用那一種儀器——無干。因為我們討論的，所在意的，是製

造過程所表現的能力，而這可不是量測能力，更不是測量的方法。如果我們用不同的尺度或者儀器g_1, g_2,...來量測X，同時又得到了不同的C_{p1},C_{p2},...等不同的製程能力指數，那麼這個指數，顯然除了表現製程能力之外，還帶著其他不相干的噪音雜訊。在這樣的意味之下，因儀器或尺度的不同而不同的C_p公式，都是不十分恰當的。

在這裡，我們所提出的看法，是製程能力無關於原始尺度。裘蘭的公式裡，明白地表現出，若是X用公制量測，或是用英制量測，C_p之值不受影響。這一點所說的乃是C_p值不受一次線性變換的影響——相信讀者很容易接受這樣的概念。但我們想說的話是：C_p的值，也應該不受所有的單調變換的影響才是：所有的有電子讀數的量測，均經由某一種感應器及一些邏輯線路而得，我們並不知道它們所相對應的變換是否為線性變換！汽車裡的油量表，是由固定在某一個軸上的浮筒的位置來判定油量的，因此它的讀數是和浮筒所呈的角度θ所相應的正弦函數所表現的。因此不是線性函數。但這其實並不打緊，因為油量表上的刻度也明白不是等間隔的，但這也並不打緊。因為這些都不是主要的癥結。一個有意義的指標，就應該避開這些人為且不十分相干的枝節，直指問題的核心。時下所有的C_p及其各衍生指數的公式，都十分在意「測量值X的原始尺度」。但甚麼是「原始」尺度呢？工業上、科學上並不去經過非線性變換之後的測度：例如分貝和芮氏地震指標都是對數尺度！

而我們的公式——三不管先化為常態的公式——卻是不受影響的。因為$F(x)$乃是X的分布，如果我們用另一個「儀器」$h(x)$來做測量，我們只需將公式中的$F(x)$，換成$h(x)$的累積分布函數$G(x)$便好，——用統計的術語來說，我們的C_p的定義公式是「和分布無關(distribution free)的」。

在實務上的作法又為何？實務上，我們得先估計出$F(x)$，而這在已有X_1,X_2,....X_n等n個樣本之後，並不是難事。用有母數模型，我們可得到$F(x;\hat{\theta})$，而在無母數模型之中，可得到$\hat{F}(x)$。將之代入C_p之公式，就得到估計出來的C_p。

這樣的C_p，除了「直接抄自裘蘭」之外，還有什麼好處？其實不多。我們只是：「若裘蘭錯了，我們便錯：若他對了，我們便對」而已。概念上，這只是「匯率釘住美金」的做法。自學理來看，不論是心態氣魄都還有可議之處。

但「抄襲」也還要一點功力：我們有沒有抄到裘蘭的精意？因為我們實在不知道裘蘭為什麼將6σ看成製程能力，因此我們也並不知道我們有沒有師承到他的精意。但是，若自ppm的觀點來看，如果(L_1, L_2)取得恰好對稱，i.e.

$$F(L_1)=1-F(L_2)$$

則我們的C_p公式所暗示的ppm值，和裘蘭的原始公式(在常態分布而且對稱的條件之下所暗示的ppm值，是完全一樣的。證明是一個統計學上的小習題，我們就不做了。

我們的結論是：如果我們不執著於「原始尺度」，而開始想像一種「跟所有的單調變換都無關」的C_p值，就會很自然的得到一個新的C_p公式。公式中Φ^{-1}的部分其實是多餘的——我們只是儘量去配合裘蘭而已。「跟單調變換無關」是我們排除智慧障的方法，我們最大的障礙，其實不是原始的公式，而是維度。公式是法，乃是小乘：維度是道，看法是比較有深度的。若有了X_1,X_2,...,X_n 基本上所有有關F的資訊，都表現在這n個點所做成的直方圖上。若他們看起來像常態分布，則所有的資訊，都

表現在$\overline{X}$及$S^2=\frac{1}{n}\Sigma(X_i-\overline{X})^2$上面。不論是$C_p$、$C_{pk}$、$C_{pm}$還是任何其他的製程能力指數，都是想用一個數字來表現常態分布$N(\mu,\sigma^2)$——而這在統計學上，老早就已知道是做不到的：沒有任何指標可以取代一個用$X_1,X_2,\ldots,X_n$畫出來的直方圖。而在這樣的圖裡，上、下限是否對稱，目標值是否在中間等重要訊息一目了然。我們發明了一個Φ^{-1}，只是將塵埃拂淨，使得袞蘭的明鏡更清晰的做法。眞正的做法是「本來無鏡，拂它作甚？」。問題的本質至少是二維的，因此用任何單一指標，都會有問題的。

唯有無礙，才到靈臺。工業生產是爲了訂單，因此客戶若問起貴公司的C_p，我們還是得給他一個值。因此談品質的人沒法無礙。用一"ß"" C_p來看至少二維的F，基本上是困難重重的——要不然那裡會有那麼多的衍生指標？因此品質人士對C_p的努力，註定的是瞎子摸象的工作。

我們說了大半天，只是說了一個方法：如果非要摸象，最好的方法是先把象的位置擺正，讓你一下子就摸到它的鼻子！