中國統計學報
第 33 卷第 3 期
八十四年九月
437–444 頁

有關 2^{k-p} 設計定義式之辨別

林共進

美國賓州州立大學管理科學系

摘　要

二水平部分實施因子設計 (two-level fractional factorial design), 被認為是實驗設計法最主要的設計之一，這在工業統計上尤其顯著。一個 2^{k-p} 設計的性質，可以完全由其定義式 (defining relationship) 來決定。有關此設計的種種，在文獻上記載繁多，但探討任一已知 2^{k-p} 設計之定義式的辨識方法，並不為一般人所知。本文提供一簡便方法，可以直接而有效的辨別任一給定 2^{k-p} 設計的定義式，從而掌握其種種特性，文中並以幾個實例應驗所提方法。

關鍵詞： 二水平部分實施因子設計，定義式，基本行，衍生行。

美國數學會分類索引： 主要 62K15。

1. 引言

在理想的狀況下，統計人員妥善的針對各方考量，設計出符合需要的實驗，進而有效的從少量實驗中獲取大量珍貴的訊息。由於對實驗設計本身有充分

了解,即使在複雜的混淆(confounding)下,在資料分析階段往往可以利用許多已知的數學性質推導出正確的結論來。很遺憾的,在多數實務經驗中,我們發現統計人員沒有參與太多實驗設計的規劃階段。當實驗結果交到資料分析師手中時,原本實驗設計方案往往十分模糊,大大增加最後推論的難度,以及不可靠性。

愈來愈多的工業實驗採用統計實驗法,來加速品質的提昇,由於其便捷有效率,二水平部分實施因子設計(two-level fractional factorial design)長期被廣泛使用,此種設計在文獻上記載繁多,深信從1920年代就被一般人所採用。一個 2^{k-p} 設計之種種性質,可以由其定義關係式(defining relationship)來決定,而其間是一對一對應的。本文探討當給定一個 2^{k-p} 設計時,如何辨別其定義式。

一個 2^{k-p} 設計指的是 2^k 因子設計,實施 2^{-p} 部分,其構建方法很多,最爲一般人採用的是(1)寫下 $s(=k-p)$ 個基本行(basic columns),這 s 個基本行涵蓋 2^s 之所有可能組合,接著(2)定義 p 個衍生行(generator),每一個衍生行爲若干基本行之乘積。舉一簡單實例,考慮一個 2^{3-1} 設計,我們有2個基本行 $C_1=(-+-+)'$ 以及 $C_2=(--++)'$ 和一個衍生行 $C_3=C_1\times C_2=(+--+)'$,如此 (C_1,C_2,C_3) 即構成一個 2^{3-1} 設計,這裡我們用 $(-,+)$ 代表二水平中的低水平和高水平。定義關係式在此指的是所有行乘積爲 I 的集合,此時 I 指的是所有元素均爲"+"號的單元行(identity column)。雖然基本行的選擇非唯一,但其所得之定義式卻是唯一,讀者可參考Box et al.(1978)。

2. 基本方法提出與說明

給定一個 2^{k-p} 設計,如何有效的辨別其定義關係式?本文提出一種簡單的方法,本法含三個步驟:

<u>方法:</u>

步驟一:指定基本行 $C_1, C_2, \cdots, C_s$。

步驟二:辨認其相對應之位置指標 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$。

步驟三:得衍生行 $G_i=\triangle\prod_{j=1}^{s}C_i^{\delta_{ij}}$。

說明:

步驟一:基本行必須包含所有2^s的+−組合,故一般而言,任意s行只要沒有重覆列(repeat row)出現,均可作爲基本行。

步驟二: γ_0爲當所有基本行均爲"−"號時之列號。γ_i爲當基本行C_i爲"+",其他基本行均爲"−"號時之列號。

步驟三: δ_{ij}爲1或0,當行G_i在γ_i位置的符號與γ_0位置符號相異時爲1,相同則爲0; $\triangle$爲−1或+1,當行G_i在γ_0位置符號等於$(-1)^{\Sigma\delta_{ij}}$時爲+1,否則爲−1。

我們用下面這個2^{7-4}設計作爲說明。

表1列出一利用田口正交表所得之設計,一如一般的實驗,其實驗次序(run order)已經過隨機化,我們來探討其定義式關係。當然,這是一個簡單的設計,一個可能性是將其一一交互相乘再作比較,此法不但費時易錯,在實驗次數比較龐大時,尤其困難,我們亦可採用Bisgaard (1993)所提之矩陣交乘法,此法牽涉龐大而複雜的矩陣運算,不如本文所提方法一目了然。利用上面所提方法,我們可以得到如下結果:

步驟一:行(X_1, X_2, X_3)沒有任何重覆列出現,故可以作爲基本行。

步驟二:此時相對位置指標$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$爲$(6, 3, 5, 4)$。

步驟三:因而求得其他衍生行之定義式如下:

行X_4在位置指標列(6,3,5,4)之符號爲$(+,-,-,+)$,與γ_0之符號相比較,只有γ_1和γ_2之位置異號。又$(-1)^2=1$與γ_0位置同號,所以$\triangle=1$,因而得$X_4=X_1X_2$。

對行X_5而言,列(6,3,5,4)之符號爲$(-,+,-,+)$與γ_0位置之符號相比較,有γ_1和γ_3之位置異號,又$(-1)^2=1$與γ_0位置異號,所以$\triangle=-1$從而得$X_5=-X_1X_3$; 同理,可得$X_6=X_1X_2X_3$以及$X_7=X_2X_3$。

3. 實例說明

本節利用兩個比較複雜的實例來說明上述方法。

例3.1:本例採自Box and Draper (1987, P.177)書中。吾人用來說明上述方法使

例 3.1:本例採自 Box and Draper (1987, P.177) 書中。吾人用來說明上述方法使用在標準型(standard form)的特殊情形。表2列出此設計及實驗結果。此設計含16次實驗,所以需要4個基本行。很明顯地,行(X_1, X_2, X_3, X_4)構成一個標準型的基本行。所謂標準型指的是行一爲符號$(-+)$交替,行二爲$(--++)$交替,行三爲$(----++++)$交替等等。表2的行(X_1, X_2, X_3, X_4)正好滿足這個性質,此時位置指標可很明顯看出爲$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = (1,2,3,5,9)$。

(1) 對行X_5而言,相對列(1,2,3,5,9)之符號爲$(-,+,+,+,-)$,根據前述步驟可得$\triangle = 1$,因而得$X_5 = X_1X_2X_3$。

(2) 對行X_6而言,相對列(1,2,3,5,9)之符號爲$(-,-,+,+,+)$,同理可得$\triangle = 1$,因而得$X_6 = X_2X_3X_4$。

於是完全定義式爲

$$I = X_1X_2X_3X_5 = X_2X_3X_4X_6 = X_1X_4X_5X_6 \text{。}$$

註:一般而言,在標準型的2^{k-p}設計中,其位置指標爲$(\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s) = (1,2,3,\cdots,2^{s-1}+1)$, $s = k-p \geq 1$。

例 3.2:表3列出一個比較複雜的32次實驗,吾人希望得到其彼此之間的定義式,由於實驗次序已隨機化,其間之關係並不是很明顯,此設計含32次實驗,故需5個基本行(和7個衍生行)。

步驟一:首先我們注意到行$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$含有重覆列(比方說列1與列29,列3與列4等等),所以不能成爲基本行,我們採用$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$作爲基本行。

步驟二:相對位置指標爲$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5) = (7, 18, 5, 25, 9, 23)$。

步驟三:如前所述我們得下列衍生行:

行	列$(\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5)$之符號	$\triangle$	衍生行之定義關係
X_5	$(-+++--)$	$+1$	$X_5 = X_1X_2X_3$
X_7	$(++---+)$	-1	$X_7 = -X_2X_3X_4$
X_8	$(---+++)$	$+1$	$X_8 = X_3X_4X_6$
X_9	$(-+-++-)$	$+1$	$X_9 = X_1X_3X_4$
X_{10}	$(-+--++)$	$+1$	$X_{10} = X_1X_4X_6$
X_{11}	$(++-+--)$	-1	$X_{11} = -X_2X_4X_6$
X_{12}	$(-+-+-+)$	$+1$	$X_{12} = X_1X_3X_6$

完全定義關係式爲

$$
\begin{aligned}
I &= X_1X_2X_3X_5 = -X_2X_3X_4X_7 = X_3X_4X_6X_8 \\
&= X_1X_3X_4X_9 = X_1X_4X_6X_{10} = -X_2X_4X_6 \\
&= X_1X_3X_6 = \text{它們的乘積}。
\end{aligned}
$$

4. 結語

本文提出一種可以簡捷辨別出任何一定 2^{k-p} 設計定義式的方法。對資料分析人員深信有相當程度的幫助,尤其在田口正交表盛行的今天,此法可以一目了然地辨別出其之混淆關係。

此方法僅針對二水平部分實施因子設計,吾人目前更進一步對三水平情形作探討,這是一個頗具挑戰性的題目,但值得嘗試。

致謝詞:本研究由美國國家科學基金會(National Science Foundation)支持。另外,撰文與準備工作由行政院主計處羅國華先生協助,在此一併致謝。

參考文獻

Bisgaard, S. (1993). A Method for Identifying Defining Contrasts for 2^{k-p} Experiments. *J. Quality Technology* **25**, 28-35.

Box, G. E. P., Hunter, W. G., and Hunter, J. S. (1978). *Statistics for Experimenters.* John Wiley & Sons, New York.

Box, G. E. P. and Draper, N. R. (1987). *Empirical Model-Building and Response Surfaces.* John Wiley & Sons, New York.

Taguchi, G. (1987). *System of Experimental Design.* UNIPUB/Kraus International Publication: White Plain.

[民國84年2月10日收稿]

表 1. 使用正 / 負符號之 $L_8(2^7)$ 正交陣列

Run Order	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	+	+	+	+	−	+	+
2	+	+	−	+	+	−	−
3	+	−	−	−	+	+	+
4	−	−	+	+	+	+	−
5	−	+	−	−	−	+	−
6	−	−	−	+	−	−	+
7	+	−	+	−	−	−	−
8	−	+	+	−	+	−	+

表 2. 例 3.1 中之設計與結果

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
−1	−1	−1	−1	−1	−1	162*
1	−1	−1	−1	1	−1	146
−1	1	−1	−1	1	1	182
1	1	−1	−1	−1	1	133
−1	−1	1	−1	1	1	228
1	−1	1	−1	−1	1	143
−1	1	1	−1	−1	−1	223
1	1	1	−1	1	−1	172
−1	−1	−1	1	−1	1	168
1	−1	−1	1	1	1	128
−1	1	−1	1	1	−1	175
1	1	−1	1	−1	−1	186
−1	−1	1	1	1	−1	197
1	−1	1	1	−1	−1	175
−1	1	1	1	−1	1	196
1	1	1	1	1	1	173

*採自 Box and Draper (1987, p.177)。

表3. 較複雜之32 Runs的例子

Run Order	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
1	+	−	+	−	−	+	−	−	−	−	−	+
2	+	+	+	+	+	−	−	−	+	−	+	−
3	+	−	−	+	+	+	−	−	−	+	+	−
4	+	−	−	+	+	−	−	+	−	−	−	+
5	−	+	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−
6	−	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	+
7	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−	+	−
8	+	+	+	−	+	+	+	−	−	−	+	+
9	−	−	−	+	−	−	−	+	+	+	−	−
10	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−
11	+	−	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−
12	−	+	−	−	+	+	−	+	−	+	+	+
13	−	+	+	−	−	+	+	−	+	+	+	−
14	−	−	−	+	−	+	−	−	+	−	+	+
15	−	+	−	+	+	−	+	+	+	+	+	−
16	−	−	+	+	+	−	+	−	−	+	−	+
17	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	−	+
18	+	−	−	−	+	−	+	−	+	+	+	+
19	+	−	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+
20	+	−	+	+	−	−	+	−	+	−	−	−
21	−	+	+	+	−	+	−	+	−	−	−	−
22	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−	+	−
23	−	−	−	−	−	+	+	+	−	+	−	+
24	+	+	−	−	−	+	−	+	+	−	+	−
25	−	−	+	−	+	−	−	+	+	−	+	+
26	−	+	−	+	+	+	+	−	+	−	−	+
27	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	+
28	+	+	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−
29	+	−	+	−	−	−	−	+	−	+	+	−
30	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	−	+
31	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−
32	−	+	+	+	−	−	−	−	−	+	+	+

JCSA, September 1995, Vol. 33, No. 3, page 437–444

Identify Defining Contrasts for 2^{k-p} Design

Dennis K.J. Lin

Department of Management Science
Pennsylvania State University
University Park, PA 16803, U.S.A.

ABSTRACT

Two-level fractional factorial designs have been proved to be one of the most powerful statistical experimental designs. This is particularly true in industrial experimentation. A 2^{k-p} design can be uniquely determined by its defining relationship. In this paper, we provide a simple method that can correctly identify the defining relationship for any given 2^{k-p} design. Examples are given for illustration.

Key words and phrases: Basic column, defining relationship, generator, two-level fractional factorial design.

AMS 1991 subject classifications: Primary 62K15.